Primer 1. Slučajna veličina i dobitak u igri na sreću

Pri bacanju numerisane kocke igrač dobija ili plaća određenu sumu od X dinara, u zavisnosti od broja k koji dobija na gornjoj strani kocke:

$$X = \begin{cases} k, & k = 4 \ \ ili \ \ 5, \\ -3k, & k = 1 \ \ ili \ \ 2, \\ 0, & k = 3 \ \ ili \ \ 6. \end{cases}$$

Pokazati da tako definisana funkcija X predstavlja slučajnu veličinu u odnosu na polje događaja $\mathcal{F}$ koje je partitivni skup prostora elementarnih ishoda

Rešenje. Ako se sa ω_k označi elementarni ishod: dobijen je broj k, tada je preslikavanje X: $\omega_1 \mapsto -3$, $\omega_2 \mapsto -6$, $\omega_3 \mapsto 0$, $\omega_4 \mapsto 4$, $\omega_5 \mapsto 5$, $\omega_6 \mapsto 0$.

Skup vrednosti preslikavanja je $\{-6, -3, 0, 4, 5\}$ i te vrednosti su bitne u dokazu. Njima se skup realnih brojeva deli na disjunktne intervale: $(-\infty,-6)$, $[-6,-3)$, $[-3,0)$, $[0,4)$, $[4,5)$ i $[5,\infty)$, i u odnosu na realne brojeve x iz tih intervala se i posmatraju događaji oblika $\{\omega | X(\omega) \le x\} = \{X \le x\}$.

Neka je polje događaja $\mathcal{F}$ – partitivni skup prostora elementarnih ishoda $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$.. Treba pokazati da tada preslikavanje X predstavlja slučajnu veličinu. Uslov (2) definicije je očigledno ispunjen. Što se tiče uslova (1), u zavisnosti od vrednosti realnog broja x se dobija:

— ako je $x < -6$, tada je $\{\omega | X(\omega) \le x\} = \{X \le x\} = \emptyset \in \mathcal{F}$,
— ako je $-6 \le x < -3$, tada je $\{X \le x\} = \{\omega_2\} \in \mathcal{F}$,
— ako je $-3 \le x < 0$, tada je $\{X \le x\} = \{\omega_1, \omega_2\} \in \mathcal{F}$,
— ako je $0 \le x < 4$, tada je $\{X \le x\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_6\} \in \mathcal{F}$,
— ako je $4 \le x < 5$, tada je $\{X \le x\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\} \in \mathcal{F}$,
— ako je $x \ge 5$, tada je $\{X \le x\} = \Omega \in \mathcal{F}$.

Stoga preslikavanje X predstavlja slučajnu veličinu u smislu Definicije 1.

Taj rezultat je i očekivan jer je Ω konačan skup, a $\mathcal{F}$ njegov partitivni skup. Međutim, ako se uzme polje događaja $\mathcal{F}_1$ koje sadrži samo siguran i nemoguć događaj, tada, osim prvog i poslednjeg događaja u gornjem nizu događaja ostali NE pripadaju polju $\mathcal{F}_1$ i stoga, u odnosu na takvo polje, posmatrano preslikavanje ne zadovoljava Definiciju 1 i ne predstavlja slučajnu veličinu.

☺ VAŽNO – Primer pokazuje da neko preslikavanje ne mora predstavljati slučajnu veličinu u odnosu na svako polje događaja nad prostorom elementarnih ishoda.

☺ JOŠ VAŽNIJE – U daljem tekstu će se posmatrati preslikavanja koja jesu slučajne veličine u smislu definicije. Može se smatrati, recimo, da se preslikavanja posmatraju u odnosu na partitivni skup prostora elementarnih ishoda, kada će sigurno da budu slučajne veličine u smislu definicije.

Na osnovu (1) može da se dokaže da za svaki Borelov skup B, skup $\{\omega | X(\omega) \in B\}$ pripada polju $\mathcal{F}$, što se nekad uzima u definiciji slučajne veličine.